# PERTEMUAN 10

## TEKNIK PENCARIAN AKAR PADA PERSAMAAN NON-LINIER (2)

### TUJUAN PRAKTIKUM

Mahasiswa mampu menerapkan teknik-teknik pencarian akar pada persamaan non-linier menggunakan Program R.

### TEORI PENUNJANG

**Metode Newton-Raphson**

Dengan metode ini, akar dari *f*(*x*) = 0 yang dinotasikan sebagai *p* akan didekati oleh deret {*p*k} yang konvergen dengan cepat menuju *p* dibandingkan dua metode sebelumnya. Metode ini dapat digunakan jika *f*(*x*) mempunyai turunan 1 dan 2 yang kontinu disekitar akar *p*.



Gambar 2. Proses pencarian akar dengan menggunakan Metode Newton-Raphson.

Diasumsikan pendekatan awal *p*0 dekat ke *p*. Maka graph *f*(*x*) = *y* memotong sumbu *x* pada titik (*p*, 0) dimana titik (*p*0, *f*(*p*0)) terletak pada kurva dekat titik (*p*, 0). Didefinisikan *p*1 adalah titik perpotongan dari garis tangen kurva pada titik (*p*0, *f*(*p*0)) dan sumbu *x*, sehingga *p*1 akan lebih dekat ke *p* daripada *p*0. Slope garis tangen L yang melalui titik (*p*0, *f*(*p*0)) dan (*p*1, 0) adalah

*m* =  (8)

Slope garis tangen L juga dapat dinyatakan sebagai turunan pertama dari *f*(*x*) pada titik *p*0,

*m* = *f*’(*p*0). (9)

Dengan menggunakan persamaan (8) dan (9) diperoleh rumus iterasi untuk menentukan akar dari *f*(*x*) = 0 dengan menggunakan metode Newton-Raphson,

*p*1 = *p*0 − (10)

proses penentuan nilai *p*1 dapat diulang untuk mendapat deret {*p*k} yang konvergen ke *p*.

Secara umum, jika *f*(*x*), *f* ’(*x*) dan *f* ’’(*x*) kontinu di dekat akar *p* maka didefinisikan *g*(*x*) sebagai berikut

*g*(*x*) = *x* − (11)

Jika *f*’(*p*) ≠ 0 dan *p*0 dipilih cukup dekat ke *p* maka deret {*p*k} didefinisikan dengan formula iterasi

*p*k = g(*p*k−1) = *p*k−1 − , untuk *k* = 1, 2, ... (12)

Dengan meningkatnya nilai *k*, *p*k akan konvergen ke *p*.

Proses pencarian akar akan berhenti bila

1. Akar telah ditemukan
2. Mencapai iterasi maksimum (N) yang telah ditetapkan sebelumnya
3.  ≤ ε (lebar selang cukup kecil).

Contoh 1:

Tentukan akar dari persamaan

*f*(*x*) =

dengan nilai awal 4 dan ε = 10 −5 dengan menggunakan Metode Newton-Raphson

Penyelesaian:



Tabel berikut menunjukkan akar dari *f*(*x*) = =0 menggunakan Metode Newton Raphson:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x0* | *f(x)* | *xn* | *xn ‒x0* |
| 4.0000000 | 83 | 2.4339623 | 1.5660377358490569 |
| 2.4339623 | 25.589023153 | 1.3102822 | 1.1236800593693070 |
| 1.3102822 | 7.8009552117 | 0.5417544 | 0.7685277666210837 |
| 0.5417544 | 1.8677759651 | 0.2241321 | 0.3176223099314265 |
| 0.2241321 | 0.1319199658 | 0.1985201 | 0.0256120180970619 |
| 0.1985201 | 0.0004242746 | 0.1984372 | 0.0000828947939597 |
| 0.1984372 | 0.0000000040 | 0.1984372 | 0.0000000007994813 |

### Metode Secant

Metode Newton-Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi, f '(x). Namun tidak semua fungsi mudah dicari turunannya, terutama fungsi yang bentuknya rumit. Sehingga untuk fungsi yang rumit, turunan fungsi diganti dengan bentuk lain yang ekivalen dengan turunannya. Modifikasi metode Newton-Raphson ini dinamakan dengan metode Secant.

Berbeda dengan metode Newton-Raphson, untuk mencari akar dari f(x) metode Secant memerlukan dua buah tebakan awal akar, yaitu x0 dan x1. Selanjutnya, akar dari f(x)=0 akan didekati oleh nilai-nilai x2, x3 dan seterusnya.



dengan memperhatikan grafik tersebut, turunan dari fungsi f ‘(xr) dapat dihitung sebagai berikut



Kemudian, turunan tersebut disubtitusikan ke rumus Newton-Raphson



Sehingga, didapat formula iterasi untuk menentukan akar f(x) sebagai berikut



Proses iterasi akan berhenti bila

1. Akar telah ditemuakn
2. Mencapai batas iterasi yang telah ditetapkan sebelumnya
3. ⎮*xr*+1 - *xr*⎮< *ε* (galat mutlak) atau 

Contoh 2:

Hitunglah akar  *f*(*x*) = dengan metode Secant. Gunakan *ε* = 0.00001. Tebakan awal akar *x*0 = 0 dan *x*1 = 0.5. Iterasi maksimum 10.

**Penyelesaian:**

Tabel iterasinya:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| iterasi | *xn* | *f(xn)* | *xn ‒ xn-1* |
| 0 | 0.00000000 | 2.000000 | 1.0333333333 |
| 1 | 0.50000000 | 3.875000 | 1.114667e+02 |
| 2 | -0.53333300 | 3.839407 | 1.114663e+02 |
| 3 | -112.000000 | -1.317118e+06 | 3.251061e-04 |

Jadi, akar dari *f*(*x*) = adalah *x* = -112.000

### LAPORAN PENDAHULUAN

1. Jelaskan secara singkat bagaimana proses penentuan akar pada metode Secant dan Newton-Raphson!
2. Apa yang menyebabkan iterasi proses penentuan akar berhenti pada metode Secant?
3. Jelaskan secara singkat perbedaan metode Secant dan Newton-Raphson!

### MATERI PRAKTIKUM

1. Proses penentuan akar dengan metode Secant dan Newton-Raphson.
2. Buatlah fungsi dengan menggunakan R berdasarkan pseudo-code metode Secant berikut.

**procedure** Secant(x0, x1:**real**);

*{ Mencari akar persamaan f(x) = 0 dengan metode secant*

*K.Awal : x0 dan x1 adalah tebakan awal akar, terdefenisi nilainya*

# *K.Akhir: akar persamaan tercetak di layar*

*}*

**const**

epsilon = 0.000001; *{ toleransi galat akar hampiran }*

**var**

x\_sebelumnya: **real**;

**function** f(x:**real**):**real**;

*{ mengembalikan nilai f(x). Definisi f(x) bergantung pada persoalan }*

**begin**

**repeat**

x\_sebelumnya:=x1;

x:=x-(f(x1)\*(x1 - x0)/(f(x1)-f(x0)));

x0:=x1;

x1:=x;

**until** (ABS(x-x\_sebelumnya) < epsilon);

*{ x adalah hampiran akar persamaan }*

**write**(‘Hampiran akar x = ‘, x:10:6);

**end**;

1. Buatlah fungsi dengan menggunakan R berdasarkan pseudo-code metode Newton-Raphson berikut.

User inputs: a,b, max, epsilon

Initialize: iteration = 0

xold = b //to start out

Inside a loop with condition that iteration <=max:

while(iteration <=max)

compute f(a)

compute f(b)

x = b - ((f(b)\*(b-a)) / (f(b)-f(a))

increment iteration

Test:

if |x-xold| < epsilon\*|x| then

output x

goto stop

else

output (iteration, a, b, x)

xold = x

compute f(x)

if f(a)\*f(x) > 0 // here we are testing

// for a positive sign,

// not necessarily the value

a = x

else

b = x

end

end

end

stop

1. Dengan menggunakan fungsi yang telah dibuat pada materi nomor 2 dan 3, selesaikanlah contoh 1 dan 2.

### DAFTAR PUSTAKA

1. Atkinson K. 1994. Elementary Numerical Analysis, Second edition. Wiley
2. Victor A. Bloomfield. 2014. *Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering*. 1 edition. Chapman and Hall/CRC
3. [Steven C](http://www.amazon.com/s/ref=dp_byline_sr_book_1?ie=UTF8&field-author=Steven+Chapra&search-alias=books&text=Steven+Chapra&sort=relevancerank). 2011. *Applied Numerical Methods W/MATLAB: for Engineers & Scientists*. 3 edition. McGraw-Hill